

# 基于角动量守恒光线偏折角解析的 非轴对称温度场重构方法<sup>\*</sup>

吴 军, 骆恒利, 秦 烨, 邓祥吉, 曹纲正

(中国民航大学航空工程学院 天津 300300)

**摘要:**燃烧温度场的测量对于燃烧场分析有着重要意义。背景纹影法作为一种非介入式光学测量技术,具备设备简单、可实现全场测量等优点,近年来被广泛应用于燃烧温度场的重构。然而传统背景纹影法求解光线偏折角时局限于平行近轴光路假设无法建立其精确解析解,在非轴对称温度场重构过程中会产生较大误差,且降低了量值的可溯源性,故提出一种基于角动量守恒原理的非轴对称温度场重构方法。该方法的创新核心在于,将角动量守恒定律引入光线偏折角的求解过程,为复杂流场中的光线传播构建了更为精确的解析模型。该方法首先通过图像互相关算法分析有无火焰的背景图像,获取各视角下的散斑偏移量。选取同一高度平面上的偏移量数据,基于角动量守恒原理计算光线偏折角,并利用 Radon 逆变换反演归一化折射率差分布。随后,依据描述折射率与气体密度关系的 Gladstone-Dale 公式,并结合理想气体状态方程,将通过反演得到的折射率分布,换算为对应的温度场分布。实验结果表明,相比传统方法,基于角动量守恒方法重构的温度场精度显著提升,尤其在温度梯度最大的峰值区域,提升尤为显著,且整体温度场重构误差下降约 30% 以上,能够实现非轴对称温度场的重构。所提方法,能有效提升温度场重构精度,拓展了背景纹影法的应用范围。

**关键词:**背景纹影法;偏折角解析;非轴对称温度场;角动量守恒;Radon 逆变换

**中图分类号:** TB96 TH7      **文献标识码:** A      **国家标准学科分类代码:** 470.2010

## Reconstruction method of non-axisymmetric temperature field based on deflection of light angle analysis of angular momentum conservation

Wu Jun, Luo Hengli, Qin Yang, Deng Xiangji, Cao Gangzheng

(College of Aeronautical Engineering, Civil Aviation University of China, Tianjin 300300, China)

**Abstract:** The measurement of combustion temperature fields is of great significance for combustion analysis. The background schlieren method, as a non-intrusive optical measurement technology, has the advantages of simple equipment and full-field measurement, and has been widely used in the reconstruction of combustion temperature field in recent years. However, the traditional background schlieren approach relies on the assumption of a parallel paraxial optical path when solving the light-deflection angle, and its accurate analytical solution cannot be established. This leads to large errors in the reconstruction of non-axisymmetric temperature fields and reduces the traceability of the results. Therefore, this paper proposes a non-axisymmetric temperature field reconstruction method based on the conservation principle of angular momentum. The innovation core of this method lies in introducing the law of conservation of angular momentum into the process of solving deflection of light angle, and constructing a more accurate analytical model for light propagation in complex flow fields. Firstly, the background images with and without flames are analyzed using an image cross-correlation algorithm to obtain speckle displacements from multiple viewing perspectives. Based on the principle of conservation of angular momentum, the deflection of light angle is calculated by selecting the offset data on the same height plane, and the normalized refractive index difference distribution is obtained through Radon inverse transformation. Then, according to the Gladstone-Dale relation between refractive index and gas density, combined with the ideal gas state equation, the refractive index distribution is converted into the corresponding temperature field distribution. The experimental results show that, compared with the traditional methods, the precision of the

temperature field reconstructed based on the conservation of angular momentum is significantly improved, especially in the peak areas with the largest temperature gradient. The overall reconstruction error is reduced by about 30%, which can realize the reconstruction of non-axisymmetric temperature fields. The proposed method can effectively improve the accuracy of temperature field reconstruction and expand the application range of background schlieren method.

**Keywords:** background oriented schlieren; deflection angle analysis; non-axisymmetric temperature field; angular momentum conservation; iRadon reconstruction algorithm

## 0 引 言

温度作为燃烧的核心物理量,直接决定热释放与产物形成。燃烧温度场的测量能揭示热交换机理、传热方式,并可推断流体的热导率、热扩散系数等物性参数<sup>[1]</sup>。

传统的测温方法从测量方式上可分为接触式与非接触式两大类<sup>[2]</sup>。接触式测温通过传感器与被测介质间的直接热交换实现温度测量。常见的接触式测温方法包括热膨胀式测温、热电偶测温和热电阻测温<sup>[3]</sup>。然而,在流场温度测量中,传感器的侵入会干扰原始流场结构,导致测量失真。针对这一问题,非接触式测温技术展现出显著优势。此类方法通过探测流场辐射信号或穿透光束的特性变化间接获取温度<sup>[4]</sup>。其中光学测温应用广泛,如红外辐射测温和纹影技术等<sup>[5]</sup>。红外辐射测温基于普朗克黑体辐射定律<sup>[6]</sup>,但存在显著温差或发射率未知变化时,测量精度易受影响。纹影技术<sup>[7]</sup>因结构简单、测量范围宽,具备独特潜力。

纹影法的最初思路可追溯至 17 世纪的罗伯特·胡克<sup>[8]</sup>。1860 年德国物理学家 Toepler 率先利用该技术研究超音速运动<sup>[9]</sup>,正式确立了纹影成像技术。为满足不同应用需求,纹影技术从基于单相机背景纹影法测量轴对称温度场,逐步演进为采用多角度背景纹影法重建非轴对称温度场<sup>[10]</sup>。2018 年 Grauer 等<sup>[11]</sup>融合背景纹影法与计算机断层扫描技术,重建了湍流火焰的瞬时折射率场。纹影法主要分为透射式纹影法和背景纹影法<sup>[12]</sup>。透射式纹影系统<sup>[13]</sup>通过刀口位移引起的图像强度变化,定量反演流场的垂直密度梯度,进而重构瞬态温度场。然而,该方法倚赖点光源与定制透镜以产生平行光,系统复杂,因此更适用于实验环境下较小尺寸的流场测量。背景纹影法由 Dalziel 等<sup>[14]</sup>、Richard 等<sup>[15]</sup>和 Meier<sup>[16]</sup>于 2000 年左右分别独立提出。其原理是将背景散斑的位移归因于流场导致的光线偏折。通过图像互相关计算偏移量并获得偏折角<sup>[17]</sup>,即可依据其与折射率梯度的积分关系,反演折射率场并最终重构温度场。传统方法基于薄相位物体近似,忽略了光线在流场中的实际传播路径,即流场厚度<sup>[18]</sup>,在非轴对称温度场重构时,会因偏折角求解误差引入显著系统误差,直接导致温度场精度下降。

背景纹影系统的关键指标包括空间分辨率、灵敏度

和测量精度。对于空间分辨率, Raffel 等<sup>[19]</sup>指出统计位移计算固有的分辨率可以抵消背景纹影法的主要缺点,但不适合工业测量环境中。Mercier 等<sup>[20]</sup>采用最小二乘法算法,实现对背景图像变形的高精度计算,有效增强分辨率。Rajendran 等<sup>[21]</sup>提出了一种用于处理背景导向纹影(background oriented schlieren, BOS)图像的点追踪方法,通过利用点图案的先验信息来提高准确性和空间分辨率,其在点密度很高的情况下也能提供近 100% 的产率,并且对图像噪声具有鲁棒性,但增加了实验的复杂性和成本。对于灵敏度,由于背景散斑通常位移较小,一般在亚像素数量级。Gojani 等<sup>[22]</sup>给出了一组表征背景纹影法测量性能的关系,其最重要的结果是计算背景纹影系统的灵敏度和空间分辨率,采用增加焦距镜头来提高其灵敏度。Vinnichenko 等<sup>[23]</sup>采用彩色点组成的矩形网格作为背景图案,并通过特殊的颜色编码使得每个点都具有唯一性,从而即使在大幅位移的情况下也能实现稳健的点图像匹配。有效处理强非线性折射引起的同一像素多重成像问题,显著提高了系统对复杂折射现象的灵敏度,但数据处理复杂,硬件要求较高。针对测量精度问题, Gao 等<sup>[24]</sup>将背景纹影断层成像法引入高温流火焰的三维重构,通过基于 K-D 树的射线追踪优化算法,其测量精度提升了 15% 以上,同时大幅缩短了计算时间,不适合复杂的网格划分。Wu 等<sup>[25]</sup>提出以干涉条纹背景纹影法替代传统背景纹影法。此干涉法通过条纹偏移的高灵敏度测量及信号放大,实现了微小偏折角的精确量化,然而其装置复杂,在工业非轴对称场测量中适用性受限。为了兼顾装置的简易型和测量精度的需求, Wu 等<sup>[26]</sup>在传统背景纹影系统基础上,提出一种扇形光路背景导向纹影法。通过建立光线-光轴夹角校正的扇形光路模型来计算偏折角。旨在降低平行光假设误差,但因采用中心区域偏折近似简化计算,会引入残余误差。

为了解决这一问题,文章根据光纤传感理论中的角动量守恒原理<sup>[27]</sup>,提出了一种基于角动量守恒光线偏折角解析的非轴对称温度场重构方法。该方法基于多角度背景纹影系统,首先从多个视角同步采集被测非轴对称温度场的投影信息进而获得相应的光线偏移量。然后通过角动量守恒方法求解非轴对称温度场中的光线偏折角,进而利用 Radon 逆变换反演折射率场的分布,并根据折射率与温度间的定量关系式,得到温

度场分布。最后将角动量守恒方法和传统方法重建的结果与热电偶测量值进行对比分析,验证了角动量守恒方法重构的有效性。

## 1 基于角动量守恒的光线偏折角解析求解

### 1.1 角动量守恒原理

诺特定理<sup>[28]</sup>表明,系统的旋转对称性必然导致角动量守恒。在轴对称温度场中,系统绕原点旋转对称,其折射率分布仅依赖径向距离 $r$ 。因此光线在轴对称温度场中传播时满足角动量守恒。在轴对称温度场中,光线路径可用极坐标参数化,路径的微分弧长 $ds$ 满足:

$$ds = \sqrt{dr^2 + (r d\theta)^2} = \sqrt{1 + r^2(d\theta/dr)^2} dr \quad (1)$$

几何光学中,光的传播路径由费马原理决定<sup>[29]</sup>,光线的实际路径对应光程 $S$ 的极值为:

$$S = \int_C n ds \quad (2)$$

光程泛函写为:

$$S[\theta] = \int_{r_1}^{r_2} \mathcal{L}\left(r, \theta, \frac{d\theta}{dr}\right) dr \quad (3)$$

其中,  $\theta' = d\theta/dr$ ,  $\mathcal{L}$ 为拉格朗日函数。泛函取极值的必要条件满足欧拉-拉格朗日方程,即:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} - \frac{d}{dr}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta'}\right) = 0 \quad (4)$$

由于系统旋转对称,拉格朗日函数不显含 $\theta$ ,则代入式(4)得:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta'}\right) = 0 \quad (5)$$

此即诺特守恒律的微分形式,直接导出守恒量,并计算式(5)的偏导数,即:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta'} = n(r) \cdot \frac{\partial}{\partial \theta'}(\sqrt{1 + r^2 \theta'^2}) = \frac{n(r) r^2 \theta'}{\sqrt{1 + r^2 \theta'^2}} = L \quad (6)$$

光线切向方向与其径向方向之间的夹角 $\phi$ 满足:

$$\sin \phi = \frac{r \theta'}{\sqrt{1 + r^2 \theta'^2}} \quad (7)$$

代入守恒量表达式(6)中,得:

$$n(r) \cdot r \cdot \sin \phi = L \quad (8)$$

因此,光线穿过轴对称温度场时,其角动量守恒。

### 1.2 角动量守恒在非轴对称温度场适用性证明

在非轴对称温度场中,角动量不再守恒,需进一步探究角动量守恒在该体系中的适用条件。二维极坐标系下,任选非轴对称温度场中的一点作为坐标原点 $O$ ,考虑光线从初始点 $P(r_p, \theta_p)$ 以方向 $u_p$ 射入该非轴对称温度场介质中,入射角为 $\phi_p$ 。在温度场中发生偏转后,从

点 $Q(r_q, \theta_q)$ 以方向 $u_q$ 射出,出射角为 $\phi_q$ ,总偏转角 $\Delta\theta_{\text{total}}$ ,光线传播完整路径如图1所示。

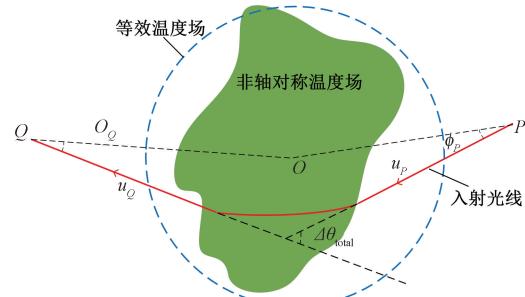


图1 等效温度场光路

Fig. 1 Optical path diagram of equivalent temperature field

基于上述原理,可通过调整折射率分布设计出一个等效的轴对称折射率分布,使得光线在该等效介质中传播时满足与原始非轴对称场相同的入射与出射条件。

在等效轴对称温度场中,折射率分布仅依赖径向坐标 $r$ ,即 $n = n(r)$ ,其具有旋转对称性。这种对称性使得光线在传播过程中角动量守恒,且满足:

$$n(r_p) r_p \sin \phi_p = n(r_q) r_q \sin \phi_q = L \quad (9)$$

总偏转角由路径积分给出,即:

$$\Delta\theta(n) = \int_{r_p}^{r_q} \frac{L}{r \sqrt{[n(r)]^2 - L^2}} dr \quad (10)$$

等效轴对称折射率场需满足 $\Delta\theta(n) = \Delta\theta_{\text{total}}$ 和边界条件:

$$n(r_p) = n_p = \frac{L}{r_p \sin \phi_p} \quad (11)$$

$$n(r_q) = n_q = \frac{L}{r_q \sin \phi_q} \quad (12)$$

下文将采用 Schauder 不动点定理<sup>[30]</sup>,证明等效轴对称温度场的存在性。通过定义适当的映射并在特定函数空间中构造一个与折射率扰动相关的紧凸集,进而定义描述系统偏移的扰动函数,可论证该映射存在不动点,此不动点即对应于所求的等效轴对称折射率分布。

首先定义扰动函数为:

$$h(r) = (r - r_p)(r_q - r) \quad (13)$$

在区间 $(r_p, r_q)$ 上, $h(r) > 0$ 。引入非线性算子 $T$ 作用于折射率分布函数 $n(r)$ ,即:

$$T(n)(r) = n(r) + c(n)h(r) \quad (14)$$

其中, $c(n)$ 由式(15)唯一确定,即:

$$\Delta\theta(n + ch) =$$

$$\int_{r_p}^{r_q} \frac{L}{r \sqrt{[(n(r) + ch(r))r]^2 - L^2}} dr = \Delta\theta_{\text{total}} \quad (15)$$

被积函数严格单调递减,因此可以通过调节 $c(n)$ 使得:

$$\Delta\theta(T(n)) = \Delta\theta_{\text{total}} \quad (16)$$

由 Schauder 不动点定理可知, 若能找到一个不动点  $n^*$  使  $T(n^*) = n^*$  时,  $c(n^*) = 0$  则  $\Delta\theta(n^*) = \Delta\theta_{\text{total}}$ 。不动点  $n^*$  即为所求的轴对称折射率场。

设  $X = C^0([r_{\min}, r_{\max}])$  为闭区间上的连续函数空间,  $r_{\min} = \min(r_p, r_q)$ ,  $r_{\max} = \max(r_p, r_q)$ 。赋予上确界范数, 由于一致收敛的连续函数极限仍连续, 故  $X$  是完备的 Banach 空间。定义紧凸集  $K$  为:

$$K =$$

$$\left\{ n \in X \left| \begin{array}{l} n(r_p) = n_p \\ n(r_q) = n_q \\ n_{\min} \leq n(r) \leq n_{\max}, \quad \forall r \in [r_{\min}, r_{\max}] \\ |n(r_1) - n(r_2)| \leq M|r_1 - r_2|, \quad \forall r_1, r_2 \end{array} \right. \right\} \quad (17)$$

其中, 参数满足  $n_{\min} > (|L|/r_{\min}) + \alpha$ ,  $\alpha > 0$ ,  $n_{\max} > \max(n_p, n_q)$ 。接下来验证  $K$  的非空性、凸性和紧性。

构造线性函数进行非空性证明, 即:

$$n_{\text{lin}}(r) = n_p + \frac{n_q - n_p}{r_q - r_p}(r - r_p) \quad (18)$$

该线性函数满足边界条件  $n_{\text{lin}}(r_p) = n_p$  和  $n_{\text{lin}}(r_q) = n_q$ 。由单调性可知, 有  $n_{\min} \leq n_{\text{lin}}(r) \leq n_{\max}$ , 则其导数的绝对值为:

$$\left| \frac{dn_{\text{lin}}}{dr} \right| = \frac{|n_q - n_p|}{|r_q - r_p|} = M_0 \quad (19)$$

满足 Lipschitz 条件, 取  $M \geq M_0$  时,  $n_{\text{lin}} \in K$ , 故  $K$  非空集合。

凸性证明, 对任意  $n_1, n_2 \in K$ ,  $t \in [0, 1]$ , 令  $n_t = tn_1 + (1 - t)n_2$ 。在边界点处有:

$$n_t(r_p) = tn_p + (1 - t)n_p = n_p \quad (20)$$

$$n_t(r_q) = tn_q + (1 - t)n_q = n_q \quad (21)$$

因为  $n_1(r), n_2(r) \in [n_{\min}, n_{\max}]$ , 则  $n_t(r)$  满足  $n_{\min} \leq n_t(r) \leq n_{\max}$ 。进一步由三角不等式和 Lipschitz 条件得:

$$\begin{aligned} & |n_t(r_1) - n_t(r_2)| \leq \\ & t|n_1(r_1) - n_1(r_2)| + (1 - t)|n_2(r_1) - n_2(r_2)| \leq \\ & M|r_1 - r_2| \end{aligned} \quad (22)$$

故  $n_t \in K$ ,  $K$  为凸集。

紧性证明, 对任意  $n \in K$ , 存在全局上界  $\|n\|_{\infty} \leq n_{\max}$ 。给定  $\varepsilon > 0$ , 满足:

$$|n(r_1) - n(r_2)| \leq M|r_1 - r_2| < \varepsilon \quad (23)$$

则其具有等度连续性。设序列  $\{n_k\} \subset K$  在  $X$  中收敛于  $n$ , 满足边界条件, 即:

$$n(r_p) = \lim_{k \rightarrow \infty} n_k(r_p) = n_p \quad (24)$$

$$n(r_q) = \lim_{k \rightarrow \infty} n_k(r_q) = n_q \quad (25)$$

根据 Lipschitz 条件:

$$|n(r_1) - n(r_2)| = \lim_{k \rightarrow \infty} |n_k(r_1) - n_k(r_2)| \leq$$

$$M|r_1 - r_2| \quad (26)$$

故  $K$  为紧集。

对算子  $T$  的映射性和连续性证明。 $\forall n \in K, m = T(n) = n + c(n)h$ , 则  $m(r_p) = n_p, m(r_q) = n_q$ 。对于映射, 有界性可表示为:

$$\|m\|_{\infty} \leq \max(|n_{\min}|, |n_{\max}|) + \bar{C} \cdot \frac{(r_q - r_p)^2}{4} \quad (27)$$

且导数的上界满足:

$$\|m'\|_{\infty} \leq M + \bar{C} \|h'\|_{\infty} \quad (28)$$

其中,  $\|h'\|_{\infty} \leq |r_q + r_p| + 2\max(|r_{\min}|, |r_{\max}|)$ ,  $\bar{C}$  为  $|c(n)|$  的一致上界, 且根据 Lipschitz 条件,  $M' = M + \bar{C} \|h'\|_{\infty}$ 。由一致收敛性及连续性得:

$$\begin{aligned} & \|T(n_k) - T(n)\|_{\infty} \leq \|n_k - n\|_{\infty} + \\ & |c(n_k) - c(n)| \times \|h\|_{\infty} \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (29)$$

其中,  $\|h\|_{\infty} = (r_q - r_p)^2/4$  为有限常数。则算子  $T$  既具有映射性, 也保持连续性。

根据 schauder 不动点定理,  $X$  是完备的 Banach 空间。 $K \subset X$  是非空的闭凸紧集且连续, 则存在不动点  $n^* \in K$ , 使  $T(n^*) = n^*$ , 不动点  $n^*(r)$  即为所求的轴对称折射率分布函数。

因此, 非轴对称温度场中的光线传播问题, 可转化为一个等效轴对称场问题, 从而可利用角动量守恒原理求解。

### 1.3 基于角动量守恒原理的光线偏折角解析方法

承上所述, 对于任意一条在非轴对称温度场中传播的光线, 总可构造一个等效的轴对称温度场。通过调整其径向折射率分布  $n(r)$ , 可使光线在该等效场中传播所累积的总偏转角效应与原场相同。在完成此等效转换后, 即可应用角动量守恒定律进行求解。非轴对称温度场中的光线传播路径示意图如图 2 所示。

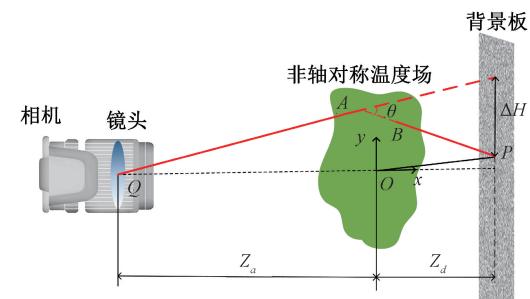


图 2 非轴对称温度场中的光线传播路径

Fig. 2 Optical path diagram of non-axisymmetric temperature field

取温度场中一点作为原点  $O(0,0)$ 。相机镜头中心  $Q$  点坐标为  $(Z_a, 0)$ 。背景板位于平面  $x = Z_d$  上, 其上一

点  $P$  的坐标为  $(x_p, y_p)$ ,  $x_p = Z_d$ 。通过对有无流场时的背景板图像进行互相关分析, 可获得偏移量  $\Delta H$ , 则出射光线  $QA$  的斜率为:

$$k_1 = \frac{y_p + \Delta H}{z_d + z_a} \quad (30)$$

该出射光线  $QA$  的单位方向向量  $\mathbf{u}(Q_1, Q_2)$  为:

$$\mathbf{u} = \left( \frac{1}{\sqrt{1 + k_1^2}}, \frac{k_1}{\sqrt{1 + k_1^2}} \right) \quad (31)$$

在  $Q$  点处的角动量守恒量为:

$$L_Q = n(r_Q) \cdot r_Q \cdot \sin \theta_Q = n(r_Q) \cdot z_a \cdot |Q_2| \quad (32)$$

设入射光的单位方向向量为  $(P_1, P_2)$ , 则入射光上点  $P$  的角动量守恒量为:

$$L_p = n(r_p) \cdot r_p \cdot \sin \theta_p \quad (33)$$

径向距离为  $r_p$ , 入射方向与径向之间的夹角  $\theta_p$  满足:

$$\sin \theta_p = \frac{|x_p P_2 - y_p P_1|}{\sqrt{x_p^2 + y_p^2}} \quad (34)$$

则守恒量  $L_p$  简化可得:

$$L_p = n(r_p) |x_p P_2 - y_p P_1| \quad (35)$$

根据角动量守恒  $L_p = L_Q$  可得:

$$n(r_Q) z_a |Q_2| = n(r_p) |x_p P_2 - y_p P_1| \quad (36)$$

由于  $Q$  点和  $P$  点均远离温度场区域, 其径向距离远大于温度场半径, 则  $n(r_Q) = n(r_p) \approx n_0$ , 式(36)可化简为:

$$|x_p P_2 - y_p P_1| = z_a |Q_2| \quad (37)$$

令  $m = z_a \cdot |Q_2|$  根据单位方向向量  $P_1^2 + P_2^2 = 1$

解得:

$$P_1 = \frac{x_p m - y_p \sqrt{x_p^2 + y_p^2 - m^2}}{x_p^2 + y_p^2} \quad (38)$$

$$P_2 = \frac{-y_p m - x_p \sqrt{x_p^2 + y_p^2 - m^2}}{x_p^2 + y_p^2} \quad (39)$$

则入射光的斜率为:

$$k_2 = \frac{P_2}{P_1} \quad (40)$$

因此可以得到偏折角为:

$$\theta = \arctan \left( \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 \cdot k_2} \right| \right) \quad (41)$$

## 1.4 基于逆拉东变换的非轴对称温度场的重构

中心切片定理<sup>[31]</sup>主要内容是图像  $f(x, y)$  在视角  $\theta$  时的平行投影的一维傅里叶变换, 可以转化为图像二维傅里叶变换  $F(u, v)$  在与  $u$  轴夹角为  $\theta$  的一个切片。

图像截面函数  $f(x, y)$  的二维傅里叶变换为:

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy \quad (42)$$

令  $u = \omega \cos \theta, y = \omega \sin \theta$ , 可以将其简化为:

$$F(\omega \cos \theta, \omega \sin \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\rho, \theta) e^{-j2\pi\rho\omega} d\rho \quad (43)$$

最后通过滤波反投影重构得到:

$$\tilde{f}(\rho, \theta) = \mathcal{F}^{-1} \{ |\omega| \mathcal{F} \{ \hat{f}(\tilde{\rho}, \theta) \} \} \quad (44)$$

$$f(x, y) =$$

$$\int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\rho, \theta) \delta(\rho - x \cos \theta - y \sin \theta) d\rho d\theta \quad (45)$$

傅里叶中心切片定理建立了投影信号一维傅里叶变换与图像二维频谱之间的联系。据此, 可从投影数据通过逆 Radon 变换, 反演非轴对称折射率场。

空气中光的折射率受温度、介质密度和光的波长的影响, 因此已有大量的经验公式拟合出光的折射率, 其相对误差为  $10^{-7}$ <sup>[32]</sup>, 根据 Gladstone-Dale 定理  $n - 1 = K\rho$  和理想气体状态方程  $PM = \rho RT$ , 可以得到则待测位置温度有如式(46)所示。

$$T = \frac{\rho_0}{\rho} T_0 = \frac{n_0 - 1}{n - 1} T_0 \quad (46)$$

因此, 根据 Radon 逆变换获得折射率场的分布后, 最后利用折射率与温度之间的关系求出非轴对称温度场的分布。

## 2 仿真与实验

### 2.1 仿真实验分析

为了验证该方法的有效性, 文章根据实际实验情况增加了实验模拟部分。基于预设温度场, 对传统方法重建结果与角动量守恒重建结果进行对比分析, 从而验证改方法的有效性。

模拟的实验场景图如图 3 所示, 假设 9 台高速相机沿非轴对称温度场周向以  $20^{\circ}$  为间隔均匀分布。每台相机均精确对准其背景平面, 形成独立的观测光路。仿真中未采用实体散斑背景板, 而是在背景平面上设置了与实验一致的采样间距, 并基于该均匀网格节点进行位移计算。在 BOS 系统中, 流场到相机和背景板的距离共同决定了系统的灵敏度与分辨率。增大距离能够提高系统探测弱密度梯度的灵敏度, 但同时也可能导致流场区域散焦, 影响位移计算精度。减小距离会导致图像边界模糊。通常的做法是确保相机精确聚焦于背景板, 并将流场置于相机与背景板之间且更靠近背景板的位置<sup>[33-34]</sup>。因此, 相机镜头光心至火焰中心点的距离设置为 700 mm, 火焰中心点至其对应背景板的垂直距离为 600 mm。测量系统中心区域的非轴对称温度场分布函数如式(47)所示。

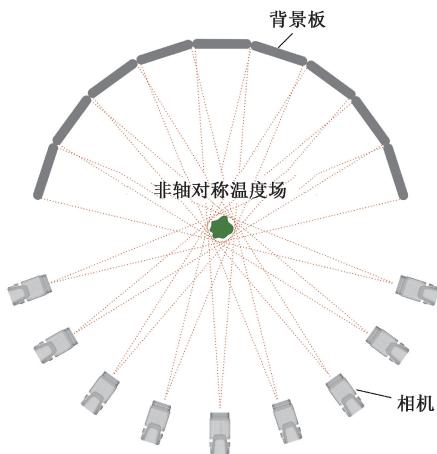


图 3 模拟实验场景

Fig. 3 Schematic of the simulation experiment

$$T(X, Y) = 293 + \frac{2300}{\pi} e^{-\left(\frac{X^2}{120} + \frac{(Y-17)^2}{120}\right)} + \frac{2300}{\pi} e^{-\left(\frac{X^2}{130} + \frac{(Y+17)^2}{120}\right)} \quad (47)$$

模拟的非轴对称温度场物理尺寸为  $100 \text{ mm} \times 100 \text{ mm}$ , 其分布特征表现为双高温核心结构。两个核心区域的峰值温度均设定为  $1030 \text{ K}$ , 已知基准温度场分布如图 4 所示。

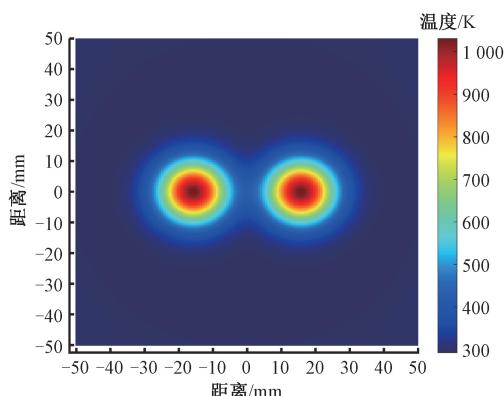


图 4 基准双峰温度场分布

Fig. 4 The known benchmark temperature field distribution

基于费马原理光线模型, 获取 9 个方向的入射与出射光线数据, 并据此计算散斑偏移量。随后, 分别采用角动量守恒法与传统方法求解偏折角, 并与基准值对比。图 5 展示了部分角度下的对比结果。

仿真结果验证了角动量守恒法在偏折角计算上的有效性, 且与已知基准值吻合度更高。

接着, 将两种方法求得的偏折角数据经投影重建算法反演, 获得归一化折射率差分布, 再根据折射率与温度关系式转换为温度场。最终重建结果如图 6 所示。

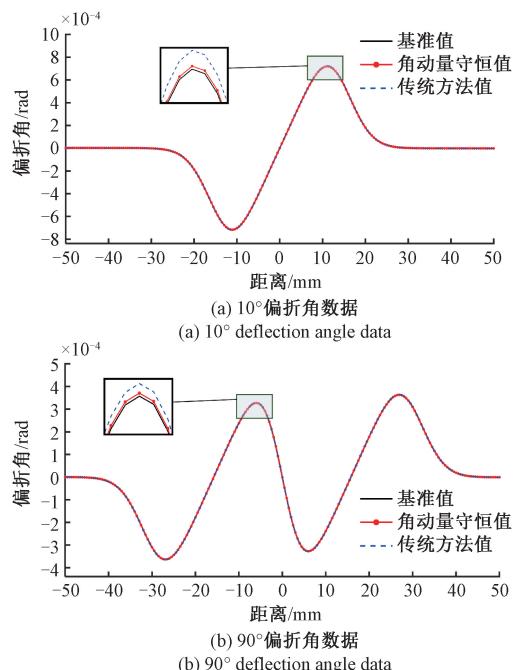


图 5 偏折角对比

Fig. 5 Comparison diagram of bimodal deflection angles

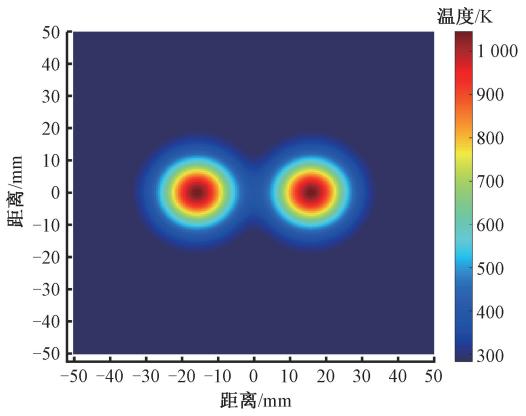
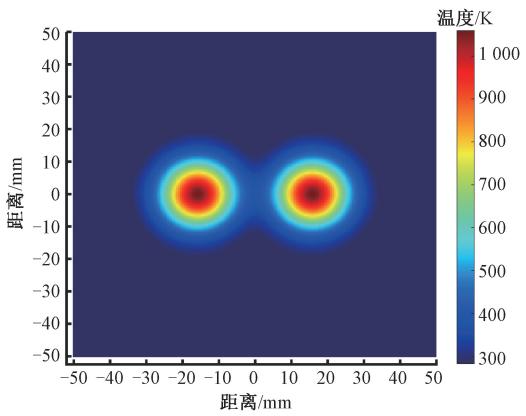
(a) 角动量守恒结果  
(a) Conservation result of angular momentum(b) 传统方法结果  
(b) Traditional method result

图 6 双峰温度场重建结果

Fig. 6 Reconstruction results of the bimodal temperature field

图 6(a) 为基于角动量守恒重建的温度场, 图 6(b) 为传统方法重建的温度场。

为清晰对比重建效果, 提取两种方法沿火焰中心连线的温度分布, 并于已知基准值进行对比, 中心温度对比如图 7 所示。

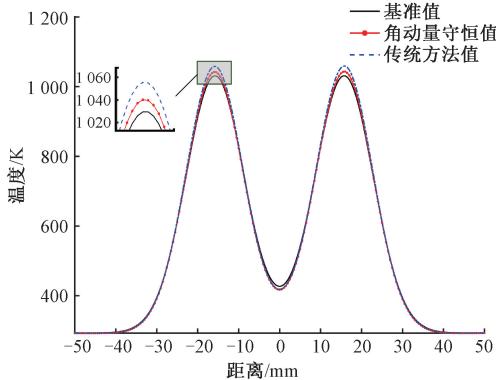


图 7 中心温度对比

Fig. 7 Central temperature comparison diagram

以基准温度场为参照, 分别评估了角动量守恒法与传统方法在温度场重构中的误差。结果表明, 角动量守恒法的最大偏差为 11.7 K, 远低于传统方法的 26.7 K, 精度提升了约 56.2%, 该最大偏差出现在火焰峰值区域。从整体温度场重构效果来看, 角动量守恒法的平均偏差为 5.274 K, 同样显著优于传统方法的 8.254 K。上述统计结果一致表明, 角动量守恒法不仅在火焰峰值等高梯度区域表现出更高的重构精度, 在整个测量范围内亦具备更优的整体稳定性与可靠性, 有效克服了传统方法在高温梯度区域精度显著下降的局限性。

## 2.2 背景纹影法的非轴对称温度场重构

研究采用自主搭建的多视角背景纹影测量系统, 以固定间距的双防风火机构建非轴对称温度场作为实验热源。系统由 9 个 500 万像素的高速相机组成环形阵列, 相机焦距为 16 mm, 各成像单元以 20° 角间隔均匀分布, 通过多通道同步触发系统实现同步采集。实验采用的背景图案为 Matlab 生成的固定尺寸、位子随机分布的数字散斑图。最左边的相机被选为实验的参考, 其被用于与其他 8 个相机分别校准。相机镜头光心至火焰中心点的距离为 700 mm, 火焰中心点至其对应背景板的垂直距离为 600 mm。多角度纹影系统如图 8 所示。

首先使用九台相机同步采集无流场及有流场状态下的背景图像序列。随后, 对无火焰与有火焰流场对应的背景图像进行互相关分析, 获取各视角下的散斑偏移量。选取距离火焰喷口处 15 mm 高度平面上的散斑偏移量, 分别应用角动量守恒方法与传统方法计算光线偏折角。

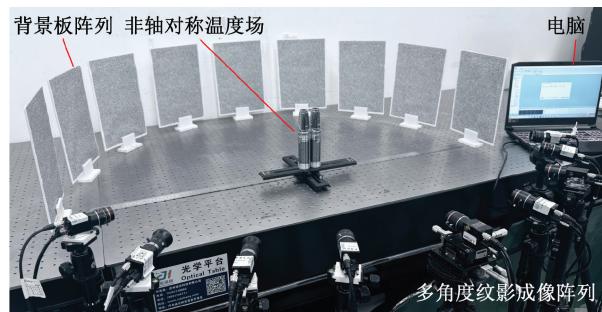


图 8 多角度背景纹影法测量场景

Fig. 8 Multi-angle background oriented schlieren method measurement scene map

接着, 利用两种方法求得的偏折角数据, 通过投影重建算法反演出归一化折射率差的分布。进而, 推导出折射率场的空间分布。最后, 利用折射率与温度之间的定量关系式, 将折射率场分布转换为温度场的分布。两种方法重构的双峰温度场结果如图 9 所示, 其中图 9(a) 为基于角动量守恒法重建的温度场, 图 9(b) 为传统方法重建的温度场。

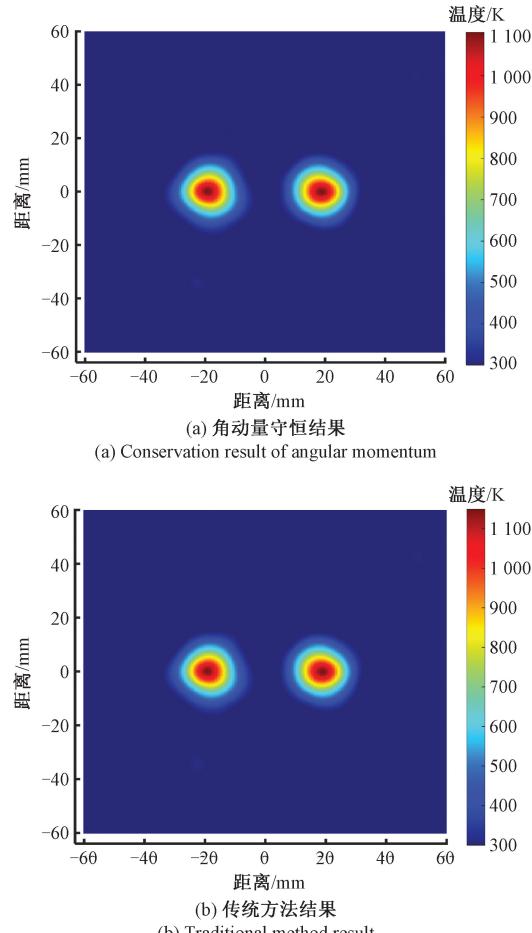


图 9 15 mm 高度层双峰温度场重构的结果

Fig. 9 Optical path diagram under near-field test conditions

为定量评估重构精度,研究采用高精度铂铑热电偶,对火焰中心连线方向的温度场分布进行高精度测量,使用的 KPS-IN600 镶装热电偶,测温范围为 0~1 800 K,并配备 XMTA-308 数字温度显示器,同时具备额外的冷端补偿功能。在距喷口 15 mm 高度平面内,沿火焰中心连线以 4 mm 间距布设 15 个测点,如图 10 所示,逐点采集温度分布数据作为验证基准。

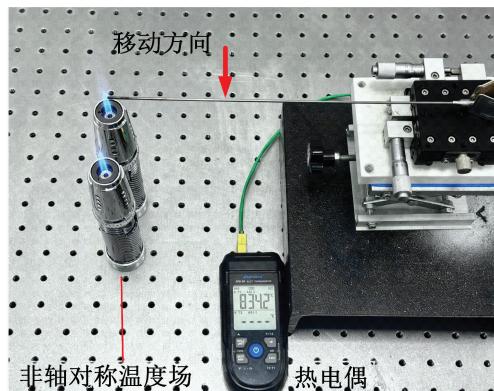


图 10 热电偶温度测量

Fig. 10 Diagram of thermocouple temperature measurement

将热电偶实测数据与角动量守恒法及传统方法的重建结果进行对比,对比结果如图 11 所示。

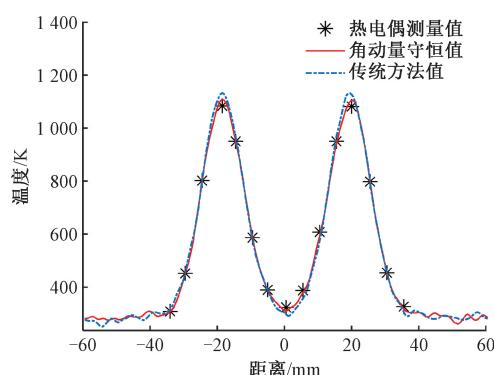


图 11 中心温度对比

Fig. 11 Central temperature comparison chart

温度误差分布如图 12 所示。该图以测量点序列为横坐标,重建温度与实测温度差值为纵坐标,定量表征不同空间位置的温度重建精度。

实验结果表明:基于角动量守恒方法重建的温度场与热电偶实测数据的最大温差为 20.3 K,显著低于传统方法的 42.9 K,精度提升了约 56.2%,最大温差同样出现在火焰峰值区域。此外,从全局统计结果来看,新方法的平均偏差为 5.274 K,较传统方法的 8.254 K 提升了 34.2%,重建结果的整体误差更小,稳定性更好。

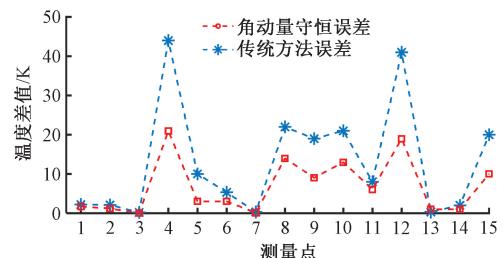


图 12 温度误差分布

Fig. 12 Reconstruction error distribution of the bimodal temperature field

### 3 结 论

本研究提出了一种基于角动量守恒光线偏折角解析的非轴对称温度场重构方法。通过构建多角度背景纹影测温系统,实现了非轴对称温度场的重建。文章首先证明了角动量守恒定律在轴对称温度场中成立,接着验证了该方法在非轴对称温度场中的适用性。随后分别应用角动量守恒法和传统方法求解 9 个视角下的光线偏折角,并重构温度分布,最后将重构结果与真实值进行对比,验证了该方法的有效性。实验结果表明,在相同的测量条件下,利用角动量守恒方法重建的温度场具有更高的精度。

仿真模型通常基于一系列理想化假设建立,而实际燃烧火焰是一个包含复杂化学反应的过程,二者之间存在固有差异。在实验测量方面,背景导向纹影系统的精度受到多种因素制约,例如在互相关分析过程中,背景光照不均会引入位移提取噪声,影响信号准确性。此外,在温度场反演中,将实际燃烧产物的 Gladstone-Dale 常数视为定值会引入一定的系统偏差,尽管在预混火焰中该偏差相对有限。同样地,在基于 iRadon 变换的折射率场重建中,有限的投影角度也会制约重建精度,导致高温区域出现系统性偏高。需要强调的是,上述误差来源对传统方法与文章所提出的角动量守恒法均产生等同影响,因此不影响两种方法在重构精度与稳健性方面比较的公正性与有效性。

为全面提升温度场定量重建的精度与可靠性,未来的研究工作将重点从 3 个方面展开:1)将增加投影角度数量并引入代数重建技术,以有效抑制有限角度伪影,提升重建质量;2)将对特定燃烧条件下混合气体产物的 Gladstone-Dale 常数进行精确实验标定,以减小其在计算中被简化为常数所带来的系统偏差;3)为克服接触式热电偶测量对火焰的干扰,将积极探索如激光诱导荧光光谱等完全无扰的光学诊断方法,以实现更直接、更广泛的验证。通过这些系统性的改进,有望将燃烧温度场的重建精度与可信度提升至新的水平。

## 参考文献

- [1] 张天宇, 吴嘉雯, 方弘毅, 等. 复杂背景下三维弯曲表面红外测温修正[J]. 仪器仪表学报, 2023, 44(5): 184-192.  
ZHANG T Y, WU J W, FANG H Y, et al. Infrared temperature measurement correction for three dimensional curved surface under complex background [J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2023, 44(5): 184-192.
- [2] UMEZAWA M, HARAGUCHI H, SUGAWARA G, et al. Temperature imaging inside fluid devices using a ratiometric near infrared (NIR-II/III) fluorescent  $Y_2O_3: Nd^{3+}$ ,  $Yb^{3+}$ ,  $Er^{3+}$  nanothermometer [J]. Analytical Sciences: The International Journal of the Japan Society for Analytical Chemistry, 2024, 40(7): 1323-1330.
- [3] 陈相洪, 史凡萍, 杨鹏, 等. 基于高精度数字温度传感器测试系统及建模仿真[J]. 电子测量与仪器学报, 2023, 37(7): 42-52.  
CHEN X H, SHI F P, YANG P, et al. Test system and modeling simulation based on high precision digital temperature sensor [J]. Journal of Electronic Measurement and Instrumentation, 2023, 37(7): 42-52.
- [4] ZHAO A Z, GARAY J E. High temperature liquid thermal conductivity: A review of measurement techniques, theoretical understanding, and energy applications [J]. Progress in Materials Science, 2023, 139: 101180.
- [5] VINNICHENKO N, PLAKSINA Y, YAKIMCHUK O, et al. Air flow temperature measurements using infrared thermography[J]. Quantitative Infra Red Thermography Journal, 2017, 14(1): 107-121.
- [6] 潘冬, 蒋朝辉, 桂卫华. 基于方向发射率校正的红外测温补偿方法[J]. 仪器仪表学报, 2022, 43(6): 213-220.  
PAN D, JIANG ZH H, GUI W H. An infrared temperature compensation method based on directional emissivity correction [J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2022, 43(6): 213-220.
- [7] VINNICHENKO N A, PUSHTAEV A V, PLAKSINA Y, et al. Performance of background oriented schlieren with different background patterns and image processing techniques [J]. Experimental Thermal and Fluid Science, 2023, 147: 110934.
- [8] SETTLES G, COVERT E. Schlieren and shadowgraph techniques: Visualizing phenomena in transparent media[J]. Applied Mechanics Reviews, 2002, 55(4): B76-B77.
- [9] KREHL P, ENGEMANN S. August toepler—the first who visualized shock waves[J]. Shock Waves, 1995, 5(1): 1-18.
- [10] 吴军, 王小宇, 唐源鸿, 等. 基于双目背景纹影法的轴对称温度场自适应重构方法研究[J]. 仪器仪表学报, 2024, 45(10): 168-177.  
WU J, WANG X Y, TANG Y H, et al. Study on the adaptive reconstruction method of axisymmetric temperature field based on binocular background oriented Schlieren method [J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2024, 45(10): 168-177.
- [11] GRAUER S J, UNTERBERGER A, RITTLER A, et al. Instantaneous 3D flame imaging by background-oriented schlieren tomography[J]. Combustion and Flame, 2018, 196: 284-299.
- [12] WU J, LIU Y T, ZHANG ZH, et al. Simultaneous measurement of multi-physics parameters in laminar flames based on background-oriented schlieren [J]. Physics of Fluids, 2025, 37(1): 013606.
- [13] HE J J, WANG X K, ZHAO X G, et al. Schlieren techniques for observations of long positive sparks: Review and application[J]. High Voltage, 2022, 7(5): 825-839.
- [14] DALZIEL S B, SUTHERLAND B R, HUGHES G O. Whole-field density measurements by 'synthetic schlieren' [J]. Experiments in Fluids, 2000, 28(4): 322-335.
- [15] RICHARD H, RAFFEL M. Principle and applications of the background oriented schlieren (BOS) method [J]. Measurement Science & Technology, 2001, 12(9): 1576-1585.
- [16] MEIER G E A. Computerized background-oriented schlieren[J]. Experiments in Fluids, 2002, 33(1): 181-187.
- [17] RAFFEL M, FAVIER D, BERTON E, et al. Micro-PIV and ELDV wind tunnel investigations of the laminar separation bubble above a helicopter blade tip [J]. Measurement Science & Technology, 2006, 17(7): 1652-1658.
- [18] WANG M, MANI A, GORDEYEV S. Physics and computation of aero-optics[J]. Annual Review of Fluid Mechanics, 2012, 44: 299-321.
- [19] RAFFEL M, SMITH N T, WOLF C C, et al. Projected moving patterns for reference-free background-oriented schlieren technique (BOS) [J]. Measurement Science and Technology, 2024, 35(11): 1-9.
- [20] MERCIER B, LACASSAGNE T. Design rules for background oriented schlieren experiments with least-squares based displacement calculation[J]. Flow Measurement and Instrumentation, 2023, 92: 102395.
- [21] RAJENDRAN L K, BANE S P M, VLACHOS P P. Dot tracking methodology for background-oriented schlieren

- (BOS) [J]. *Experiments in Fluids*, 2019, 60(11): 1-13.
- [22] GOJANI A B, KAMISHI B, OBAYASHI S. Measurement sensitivity and resolution for background oriented schlieren during image recording [J]. *Journal of Visualization*, 2013, 16(3): 201-207.
- [23] VENNICHENKO N A, ANDRIANOVA A V, PUSHTAEV A V, et al. Color-encoded M-array background oriented schlieren for measurements of strongly refracting objects [J]. *International Journal of Thermofluids*, 2023, 18: 100364.
- [24] GAO P, ZHANG Y, YU X X, et al. Reconstruction method of 3d turbulent flames by background-oriented schlieren tomography and analysis of time asynchrony [J]. *Fire*, 2023, 6(11): 417.
- [25] WU J, PAN ZH X, ZHANG CH P, et al. A non-axisymmetric temperature field reconstruction method based on the compressive sensing background oriented Schlieren method [J]. *Physics of Fluids*, 2024, 36(3): 0189835.
- [26] WU J, PAN ZH X, ZHANG CH P, et al. An axisymmetric temperature field reconstruction method based on the fan-shaped light path background oriented schlieren method [J]. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 2024, 73: 1-8.
- [27] NENAD B, STEVEN G, POUL K, et al. Control of orbital angular momentum of light with optical fibers [J]. *Optics letters*, 2012, 37(13): 2451-2453.
- [28] SARLET W, CANTRIJN F. Generalizations of Noether's Theorem in Classical Mechanics [J]. *SIAM Review*, 1981, 23(4): 467-494.
- [29] DUVAL C, HORVÁTH Z, HORVÁTHY P A. Fermat principle for spinning light [J]. *Physical Review D Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology*, 2006, 74(2): 021701.
- [30] SGINH M H, WU J W. Asymptotic stability in the Schauder fixed point theorem [J]. *Studia Mathematica*, 1998, 131(2): 143-148.
- [31] 刘帆, 王浩全, 王兆旭. 一种改进的滤波反投影超声重建算法 [J]. 国外电子测量技术, 2021, 40(9): 42-48.
- [32] LIU F, WANG H Q, WANG ZH X. Improved filtered back projection algorithm for ultrasonic reconstruction [J]. *Foreign Electronic Measurement Technology*, 2021, 40(9): 42-48.
- [33] CIDDOR P E. Refractive index of air: New equations for the visible and near infrared [J]. *Applied Optics*, 1996, 35(9): 1566-1573.
- [34] ZHOU T B, GASKINS J, POGGIE J, et al. Optimization of optical systems for background oriented schlieren [J]. *Measurement Science and Technology*, 2025, 36(1): 1-11.

- [34] LIU X L, GUO T X, ZHANG P F, et al. Extraction of a weak flow field for a multi-rotor unmanned aerial vehicle (UAV) using high-speed background-oriented schlieren (BOS) technology [J]. *Sensors*, 2022, 22(1): 43-65.

### 作者简介



吴军(通信作者),2009 年于天津大学获得学士学位,2011 年于天津大学获得硕士学位,2014 年于天津大学获得博士学位,现为中国民航大学教授,主要研究方向为激光与视觉检测技术。

E-mail: wujuncau@163.com

**Wu Jun** (Corresponding author) received his B. Sc. , M. Sc. , and Ph. D. degrees all from Tianjin University in 2009, 2011, and 2014, respectively. He is currently a professor at Civil Aviation University of China. His main research interest includes laser and visual inspection technology.